МАТЕМАТИКА

УДК 519.21

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СЕТИ С МНОГОРЕЖИМНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

А.Р. Ерёмина

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

ON INSENSIBILITY OF STATIONARY DISTRIBUTION OF STATE PROBABILITIES OF PIECEWISE CONTINUOUS QUEUEING NETWORK WITH MULTIMODE SERVICING

A.R. Eryomina

Y. Kupala Grodno State University

Рассматривается открытая кусочно-непрерывная сеть массового обслуживания с многорежимными стратегиями и разнотипными заявками. Количество работы, необходимое для переключения прибора с одного режима на другой, является случайной величиной с произвольной функцией распределения. Дисциплина обслуживания заявок прибором – «дискриминаторное разделение процессора» (DPS). Устанавливается, что стационарное распределение вероятностей состояний сети инвариантно относительно функциональной формы распределений величин работ, требующихся на переключение режимов приборов в узлах, если фиксированы первые моменты этих распределений.

Ключевые слова: *инвариантность*, *многорежимное обслуживание*, *DPS*, *кусочно-непрерывная сеть массового обслуживания.*

The open piecewise continuous queueing network with multimode service and polytypic demands is considered. The quantity of work, which is necessary for switching from one strategy to another, is random variable with arbitrary distribution function. The dispatching rule is DPS. It was proved that stationary distribution is invariant in relation to functional form of distribution of work's quantities, which are necessary for switching of strategies of devices in units, on condition that first moments of these distributions are fixed.

Keywords: *invariance*, *multimode service*, *DPS*, *piecewise continuous queueing network.*

Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными моделями, описывающими функционирование многих реальных объектов в экономике, производственном секторе, логистике, технике, здравоохранении, проектировании информационных и компьютерных сетей и т. д.

Особый практический интерес представляет изучение сетей с многорежимными стратегиями обслуживания, в которых обслуживающие приборы в узлах могут работать с различной производительностью, требовать ремонта или замены. Подобные сети могут быть использованы при проектировании производственных линий, ремонтных мастерских, планировании графика работы общественного транспорта и т. д. Они исследовались Ю.В. Малинковским в работах [1]–[3]. Однако в этих работах полагалось, что длительности пребывания приборов в режимах имеют экспоненциальное распределение. На практике это чаще всего не так. Поэтому при исследовании сетей массового обслуживания важную роль играет проблема инвариантности стационарного распределения вероятностей состояний сетей по отношению к функциональному виду распределений величин работ, требующихся на переключение режимов приборов в узлах.

Для сетей с многорежимными стратегиями, немедленными дисциплинами обслуживания и заявками одного типа эта проблема была решена А.Н. Старовойтовым в [4], [5]. Однако на практике, как правило, встречаются сети, в которые поступают заявки различных типов, что хорошо проиллюстрировано в классических работах [6]–[8], посвященных BCMP-сетям и сетям Келли. В этих и других работах не рассматривались случаи, связанные с многорежимным обслуживанием.

Для информационных и вычислительных сетей также представляют интерес модели, описывающие эффект разделения средств сети между несколькими требованиями, работами и т. д. При так называемых дисциплинах «разделения процессора» все или некоторые группы заявок обслуживаются одновременно единственным прибором с переменной скоростью обслуживания, принимающей дробные значения и изменяющейся во времени в зависимости от состояния сети. К группе данных дисциплин относятся «обобщенное разделение процессора» (GPS – Generalized Processor-Sharing), «справедливое разделение процессора» (EPS – Egalitarian Processor-Sharing), «дискриминаторное разделение процессора» (DPS – Discriminatory Processor-Sharing) и другие. Подробно они рассмотрены в

[9]. Свойства инвариантности сетей с разделением процессора исследовались в работах [7], [8] и других.

В настоящей работе впервые исследуется открытая сеть с многорежимными стратегиями и дисциплиной обслуживания DPS, для которой величина работы по переключению режимов приборов в узлах имеет произвольный закон распределения, а сами заявки являются разнотипными.

1 Постановка задачи

Рассматривается открытая сеть с многорежимными стратегиями обслуживания, состоящая из N узлов, в которых циркулируют заявки M типов.

Поступающий поток заявок – простейший с интенсивностью λ, а каждая заявка входного потока, независимо от других заявок, направляется в l-й узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(l,u)}$, $l=\overline{1,N}$, $u=\overline{1,M}$ $\left(\sum\limits_{l=1}^{N}\sum\limits_{u=1}^{M} p_{0(l,u)}=1\right)$.

Обслуживание заявок в узлах осуществляется в соответствии с дисциплиной DPS. Данную дисциплину можно описать следующим образом. Поступившая в узел заявка сразу начинает обслуживаться (очередь в её традиционном понимании отсутствует). В моменты поступления новых или ухода обслуженных заявок происходят скачки скорости обслуживания. При такой дисциплине обслуживания каждая заявка имеет свою скорость выполнения работы по обслуживанию, которая пропорциональна числу заявок данного типа и обратно пропорциональна общему числу заявок в узле.

После обслуживания в l-м узле заявка типа u мгновенно и независимо от других заявок направляется в k-й узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(l,u)(k,v)}$, а с вероятностью $p_{(l,u)0}$ покидает сеть:

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M} p_{(l,u)(k,v)}+p_{(l,u)0}=1;\, l,k=\overline{1,N};\, u,v=\overline{1,M}.$$

В l-м узле находится единственный обслуживающий прибор, который может работать в r_l+1 режимах: $0,1,\ldots,r_l$, $l=\overline{1,N}$. В качестве основного режима работы прибора полагается режим 0. Переключение происходит только на соседние режимы. Во время переключения прибора с одного режима на другой число заявок в узле не меняется.

Длительность обслуживания заявки прибором l-го узла имеет показательное распределение с параметром μ_l.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_N(t)\right),$$

где

$$x_l(t)=\left(\overline{x}_l(t),j_l(t)\right)=\left(x_{l1}(t),x_{l2}(t),\ldots,x_{lM}(t),j_l(t)\right)$$

описывает состояние l-го узла в момент времени t. Здесь $x_{lu}(t)$ – число заявок типа u в l-ом узле в момент времени t, $j_l(t)$ – режим, в котором работает l-й узел в момент времени t. Процесс $x(t)$ обладает не более чем счётным фазовым пространством состояний $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_N$, где

$$X_l=\left\{(\overline{x}_l,j_l)=\left(x_{l1},x_{l2},\ldots,x_{lM},j_l\right),\right.$$
$$\left.x_{lu}=0,1,2,\ldots;\, l=\overline{1,N},\, u=\overline{1,M},\, j_l=\overline{0,r_l}\right\},$$

x_{lu} – число заявок типа u в l-ом узле, $|x_l|=\sum\limits_{u=1}^{M}x_{lu}$ – общее число заявок в l-ом узле.

Обозначим через $(\overline{0},0)$ такое состояние l-го узла, когда в нем отсутствуют заявки и он функционирует в режиме 0.

Пусть в момент времени t состояние l-го узла есть вектор $(\overline{x}_l,j_l)$. Тогда работа по обслуживанию заявки типа u выполняется со скоростью $\alpha_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)=\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\dfrac{x_{lu}}{|x_l|}$, если в узле находится всего $|x_l|$ заявок, x_{lu} заявок типа u и он работает в режиме j_l $(l=\overline{1,N},u=\overline{1,M},j_l=\overline{0,r_l})$. При этом полагается, что $\alpha_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)>0$, если $x_{lu}\neq 0$; $\alpha_{lu}(x_{lu},|x_l|,j_l)=0$, если $x_{lu}=0$ или $|x_l|=0$.

Количество работы, необходимое для переключения прибора l-го узла из основного режима работы в режим 1, является случайной величиной $\eta_l(0)$ с произвольной функцией распределения $\Phi_l(0,\tilde{u})$, $\Phi_l(0,0)=0$, плотностью распределения $f_l(0,\tilde{u})$ и математическим ожиданием $\tau_l(0)<+\infty$. При этом скорость указанного переключения не является постоянной. Так, если в момент времени t состояние узла есть $x_l(t)$, а $\xi_{l,0}(t)$ – остаточное количество работы, которое надо выполнить с момента t до перехода в режим 1, то скорость переключения прибора будет равняться $v_l(\overline{x}_l,0)\beta_l(0,\xi_{l,0}(t))$, где $v_l(\overline{x}_l,0)$ – заданная скорость перехода из режима 0 в режим 1, $\beta_l(0,\xi_{l,0}(t))$ – непрерывная функция, выражающая зависимость скорости выполнения работы по переключению режима с 0 на 1 от количества оставшейся работы $\xi_{l,0}(t)$.

Для состояний x_l, у которых $1\le j_l\le r_l-1$, количество работы, необходимое для изменения режима (на j_l-1 или j_l+1), также является случайной величиной $\eta_l(j_l)$ с произвольной функцией распределения $\Phi_l(j_l,\tilde{u})$, $\Phi_l(j_l,0)=0$, плотностью распределения $f_l(j_l,\tilde{u})$ и математическим ожиданием $\tau_l(j_l)<+\infty$.

Если в момент времени t состояние узла есть $(\overline{x}_l, j_l)$, а $\xi_{l,j_l}(t)$ – остаточное количество работы, которое необходимо выполнить с момента t до перехода в соседний режим, то скорость указанного переключения будет равняться $\left(v_l(\overline{x}_l, j_l)+\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)\right)\beta_l(j_l,\xi_{l,j_l}(t))$, где $v_l(\overline{x}_l, j_l)$ и $\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)$ – заданные скорости перехода в режимы j_l+1 и j_l-1 соответственно, $\beta_l(j_l,\xi_{l,j_l}(t))$ – непрерывная функция, выражающая зависимость скорости выполнения работы по переключению режима j_l от количества оставшейся работы. Таким образом, скорость переключения зависит от остаточного количества работы.

При этом прибор l-го узла с вероятностью $\dfrac{v_l(\overline{x}_l, j_l)}{v_l(\overline{x}_l, j_l)+\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)}$ переходит в режим j_l+1, а с вероятностью $\dfrac{\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)}{v_l(\overline{x}_l, j_l)+\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)}$ – в режим j_l-1.

Аналогично, количество работы, необходимое для перехода прибора l-го узла из режима работы r_l в r_l-1, имеет произвольную функцию распределения $\Phi_l(r_l,\tilde{u})$, $\Phi_l(r_l,0)=0$, плотность распределения $f_l(r_l,\tilde{u})$ и математическое ожидание $\tau_l(r_l)<+\infty$. При этом скорость указанного переключения не является постоянной. Так, если в момент времени t состояние узла есть $(\overline{x}_l, j_l)$, а $\xi_{l,r_l}(t)$ – количество работы, которое осталось выполнить с момента t до перехода в соседний режим r_l-1, то скорость переключения прибора будет равняться $\varphi_l(\overline{x}_l, r_l)\beta_l(r_l,\xi_{l,r_l}(t))$, где $\varphi_l(\overline{x}_l, r_l)$ – заданная скорость перехода из режима r_l в режим r_l-1, $\beta_l(r_l,\xi_{l,r_l}(t))$ – непрерывная функция, выражающая зависимость скорости выполнения работы по переключению режима с r_l на r_l-1 от количества оставшейся работы $\xi_{l,r_l}(t)$.

Таким образом,

$$\frac{d\xi_{l,j_l}(t)}{dt}=-((\nu_l(\overline{x}_l, j_l)I_{(j_l\neq r_l)}+ \\ +\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)I_{(j_l\neq 0)})\beta_l(j_l,\xi_{l,j_l}(t)).$$

Далее будем полагать, что $\nu_l(\overline{x}_l, j_l)>0$, $\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)>0$, функции $\beta_l(j_l,\tilde{u})>0$ являются непрерывными для любого j_l и выполняется условие

$$q_l(j_l)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tilde{u}f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u}<+\infty,\ l=\overline{1,N}.$$

Полагаем, что матрица маршрутизации $(p_{(l,u)(k,v)})$, $u,v=\overline{1,M}$, $l,k=\overline{0,N}$, $p_{(0,u)(0,v)}=0$, неприводима. Тогда система уравнений трафика принимает вид:

$$\varepsilon_{lu}=\lambda p_{0(l,u)}+\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\varepsilon_{kv}p_{(k,v)(l,u)}, \\ l=\overline{1,N};\ u=\overline{1,M}, \tag{1.1}$$

где ε_{lu} – средняя интенсивность поступления в l-ый узел заявок типа u.

Данная система уравнений трафика имеет единственное положительное решение (ε_{lu}; $l=\overline{1,N}$; $u=\overline{1,M}$), что можно доказать, перенумеровав соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получим систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [10].

В общем случае процесс $x(t)$ не является марковским, поэтому рассматривается процесс $\zeta(t)=(x(t),\xi(t))$, полученный путем добавления к $x(t)$ непрерывной компоненты

$$\xi(t)=(\xi_{1,j_1(t)}(t),\xi_{2,j_2(t)}(t),...,\xi_{N,j_N(t)}(t)).$$

В рамках постановки задачи процесс $\zeta(t)$ является кусочно-непрерывным марковским процессом [11], т. е. скорость выполнения работы по переключению режима не является постоянной, а зависит от количества оставшейся работы. Эта зависимость в l-ом узле выражается непрерывной функцией $\beta_l(j_l,\tilde{u})$.

Под $P=\{P(x)\}$ будем понимать стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$. Введем обозначения:

$$\vartheta_l(\overline{x}_l, j_l)=v_l(\overline{x}_l, j_l)I_{(j_l\neq r_l)}+\varphi_l(\overline{x}_l, j_l)I_{(j_l\neq 0)},$$

$$F(x,z)=\lim_{t\to\infty}P\Big\{x(t)=x; \\ \xi_{1,j_1(t)}(t)<z_{1,j_1},...,\xi_{N,j_N(t)}(t)<z_{N,j_N}\Big\},$$

$$\overline{F}(x,z)=\frac{\partial^N F(x,z)}{\partial z_{1,j_1}...z_{N,j_N}}.$$

2 Основной результат

Теорема. *Пусть процесс $\zeta(t)$ эргодичен. Если выполняются соотношения*

$$\nu_l(x_{l1},x_{l2},...,x_{lM},j_l-1)\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\times \\ \times\varphi_l(x_{l1},...,x_{lu}-1,...,x_{lM},j_l)= \\ =\nu_l(x_{l1},...,x_{lu}-1,...,x_{lM},j_l-1)\times \\ \times\alpha_{lu}(x_{lu},j_l-1)\varphi_l(x_{l1},x_{l2},...,x_{lM},j_l), \\ x_{lu}\neq 0,\ u=\overline{1,M},\ l=\overline{1,N},\ j_l=\overline{1,r_l}, \tag{2.1}$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u}=\frac{1}{\beta_l(j_l,0)},\ l=\overline{1,N},\ j_l=\overline{0,r_l}, \tag{2.2}$$

то стационарные плотности $\overline{F}(x,z)$ и стационарные функции распределения $F(x,z)$ определяются по формулам

$$\bar F(x,z)=P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)q_l^{-1}(j_l)\int_{z_{l,j_l}}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde u)}{\beta_l(j_l,\tilde u)}d\tilde u, \quad (2.3)$$

$$F(x,z)=P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)q_l^{-1}(j_l)\times$$
$$\times\left(z_{l,j_l}\int_{z_{l,j_l}}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde u)}{\beta_l(j_l,\tilde u)}d\tilde u+\int_0^{z_{l,j_l}}\frac{\tilde u f_l(j_l,\tilde u)}{\beta_l(j_l,\tilde u)}d\tilde u\right), \quad (2.4)$$

$$p_l\left(\bar x_l,j_l\right)=|x_l|!\frac{q_l(j_l)}{q_l(0)}\times$$
$$\times\prod_{u=1}^{M}\frac{\varepsilon_{lu}^{x_{lu}}}{x_{lu}!}\prod_{w=1}^{x_{lu}}\alpha_{lu}^{-1}(w,j_l)\prod_{k=1}^{j_l}\frac{\nu_l\left(\bar 0,k-1\right)}{\varphi_l\left(\bar 0,k\right)}, \quad (2.5)$$

где ε_{lu} *находятся из* (1.1), *а* $P(0)$ *– из условия нормировки.*

Доказательство. Для упрощения процедуры доказательства введём в рассмотрение некоторые вспомогательные обозначения:

$$x\pm e_{lu}=\left(x_1,\ldots,\left(x_{l1},\ldots,x_{lu}\pm1,\ldots,x_{lM},j_l\right),\ldots,x_N\right);$$
$$x+e_{lu}-e_{kv}=\left(x_1,\ldots,\left(x_{l1},\ldots,x_{lu}+1,\ldots,x_{lM},j_l\right),\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\left(x_{k1},\ldots,x_{kv}-1,\ldots,x_{kM},j_k\right),\ldots,x_N\right);$$
$$x\pm e'_l=\left(x_1,\ldots,\left(x_{l1},\ldots,x_{lM},j_l\pm1\right),\ldots,x_N\right).$$

Сначала докажем теорему для $\bar F(x,z)$. Для $\bar F(x,z)$ справедлива следующая система дифференциально-разностных уравнений

$$\left(\lambda+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\frac{x_{lu}}{|x_l|}\right)\bar F(x,z)=$$
$$\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial\bar F(x,z)}{\partial z_{l,j_l}}\vartheta_l(\bar x_l,j_l)\beta_l(j_l,z_{l,j_l})+$$
$$+\lambda\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p_{0(l,u)}\bar F(x-e_{lu},z)+$$
$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\frac{x_{lu}+1}{|x_l|+1}p_{(l,u)0}\bar F(x+e_{lu},z)+$$
$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{s=1,s\ne l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{v=1}^{M}\alpha_{su}(x_{su}+1,j_l)\times$$
$$\times\frac{x_{su}+1}{|x_s|+1}p_{(s,u)(l,v)}\bar F(x+e_{su}-e_{lv},z)+$$
$$+\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\sum_{v=1}^{M}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\times$$
$$\times\frac{x_{lu}+1}{|x_l|}p_{(l,u)(l,v)}\bar F(x+e_{lu}-e_{lv},z)+$$
$$+\sum_{l=1}^{N}f_l(j_l,z_{l,j_l})\nu_l(\bar x_l,j_l-1)\times$$
$$\times\beta_l(j_l-1,0)\,\bar F(x-e'_l,z)\Big|_{z_{l,j_l-1}=0}+$$
$$+\sum_{l=1}^{N}f_l(j_l,z_{l,j_l})\varphi_l(\bar x_l,j_l+1)\times$$
$$\times\beta_l(j_l+1,0)\,\bar F(x+e'_l,z)\Big|_{z_{l,j_l+1}=0},\ x\in X. \quad (2.6)$$

Разобьем эту систему на уравнения локального баланса следующим образом:

$$\lambda\bar F(x,z)=\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\times$$
$$\times\frac{x_{lu}+1}{|x_l|+1}p_{(l,u)0}\bar F(x+e_{lu},z), \quad (2.7)$$

$$\alpha_{lu}(x_{lu},j_l)\frac{x_{lu}}{|x_l|}\bar F(x,z)=\lambda p_{0(l,u)}\bar F(x-e_{lu},z)+ \quad (2.8)$$
$$+\sum_{s=1,s\ne l}^{N}\sum_{u=1}^{M}\alpha_{su}(x_{su}+1,j_l)\times$$
$$\times\frac{x_{su}+1}{|x_s|+1}p_{(s,u)(l,v)}\bar F(x+e_{su}-e_{lv},z)+$$
$$+\sum_{u=1}^{M}\alpha_{lu}(x_{lu}+1,j_l)\frac{x_{lu}+1}{|x_l|}p_{(l,u)(l,v)}\bar F(x+e_{lu}-e_{lv},z),$$

$$\frac{\partial\bar F(x,z)}{\partial z_{l,j_l}}\vartheta_l(\bar x_l,j_l)\beta_l(j_l,z_{l,j_l})+ \quad (2.9)$$
$$+f_l(j_l,z_{l,j_l})\nu_l(\bar x_l,j_l-1)\beta_l(j_l-1,0)\,\bar F(x-e'_l,z)\Big|_{z_{l,j_l-1}=0}+$$
$$+f_l(j_l,z_{l,j_l})\varphi_l(\bar x_l,j_l+1)\times$$
$$\times\beta_l(j_l+1,0)\,\bar F(x+e'_l,z)\Big|_{z_{l,j_l+1}=0}=0,\ x\in X.$$

Стационарные плотности распределения $\bar F(x,z)$, определенные формулами (2.3), (2.5), являются решением уравнений (2.7)–(2.9) и, значит, уравнений (2.6). Это несложно доказать, поочередно подставляя указанные стационарные плотности $\bar F(x,z)$ в уравнения (2.7)–(2.9). Выполняя преобразования, получим соответственно: следствие уравнения трафика $1=\sum_{l=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\varepsilon_{lu}p_{(l,u)0}$, уравнение трафика (1.1) и, если выполнены соотношения (2.1)–(2.2), тождество. Для $\bar F(x,z)$ теорема доказана.

Теперь по $\bar F(x,z)$ найдем стационарные функции распределения $F(x,z)$. Для этого используем следующую известную зависимость между ними:

$$F(x,z)=F(x,z_{1,j_1},\ldots,z_{N,j_N})=$$
$$=\int_{-\infty}^{z_{1,j_1}}\ldots\int_{-\infty}^{z_{N,j_N}}\bar F(x,y_1,\ldots,y_N)dy_1\ldots dy_N.$$

Подставляя (2.3) в последнее выражение и учитывая неотрицательность непрерывных компонент процесса $\zeta(t)$, имеем

$$\bar F(x,z)=\int_0^{z_{1,j_1}}\ldots\int_0^{z_{N,j_N}}\left\{P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)q_l^{-1}(j_l)\times\right.$$
$$\left.\times\int_{y_l}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde u)}{\beta_l(j_l,\tilde u)}d\tilde u\right\}dy_1\ldots dy_N=$$
$$=P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)q_l^{-1}(j_l)\int_0^{z_{l,j_l}}\left\{\int_{y_l}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde u)}{\beta_l(j_l,\tilde u)}d\tilde u\right\}dy_l.$$

Для последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{z_{l,j_l}}\left\{\int_{y_l}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u}\right\}dy_l=\left\{y_l\int_{y_l}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u}\right\}\Bigg|_0^{z_{l,j_l}}-$$

$$-\int_0^{z_{l,j_l}}y_l\left(-\frac{f_l(j_l,y_l)}{\beta_l(j_l,y_l)}\right)dy_l=$$

$$=z_{l,j_l}\int_{z_{l,j_l}}^{+\infty}\frac{f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u}+\int_0^{z_{l,j_l}}\frac{\tilde{u}f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u}.$$

Таким образом, получили (2.4) и теорема доказана полностью.

Из теоремы при фиксированных

$$\int_0^{+\infty}\frac{\tilde{u}f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u},\ l=\overline{1,N},$$

с учетом равенства $P(x)=F(x,+\infty)$ вытекает следующее утверждение.

Следствие. *В условиях теоремы стационарное распределение вероятностей состояний процесса* $x(t)$ *не зависит от вида функций распределения* $\Phi_l(j_l,\tilde{u})$ *и имеет вид*

$$P(x)=P(0)\prod_{l=1}^{N}p_l(x_l)\int_0^{+\infty}\frac{\tilde{u}f_l(j_l,\tilde{u})}{\beta_l(j_l,\tilde{u})}d\tilde{u},$$

где $p_l(x_l)$ *определяются по формулам* (2.5), *а* $P(0)$ *находится из условия нормировки.*

Заключение

В статье установлены условия нечувствительности стационарного распределения вероятностей состояний открытой кусочно-непрерывной сети массового обслуживания с многорежимными стратегиями и заявками различных типов к виду законов распределения величин работ, требующихся на переключение режимов функционирования приборов в узлах, если фиксированы первые моменты этих законов, а длительности обслуживания заявок приборами имеют экспоненциальное распределение. Дисциплина обслуживания заявок прибором – «дискриминаторное разделение процессора» (DPS). Также определено, что стационарное распределение сети имеет форму произведения, где каждый множитель есть стационарное распределение изолированного узла, помещенного в фиктивную окружающую среду с пуассоновским входящим потоком.

Полученные результаты могут быть применены к широкому кругу задач при проектировании, моделировании и эксплуатации многих реальных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский*, *Ю.В.* Замкнутые информационные сети с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Информационные системы и технологии (IST'2002): материалы I междунар. конф., Минск, 5–8 ноября 2002 г.: в 2 ч. / Белорусский гос. ун-т. – Минск, 2002. – Ч. 1. – С. 324–328.

2. *Малинковский*, *Ю.В.* Мультипликативность стационарного распределения в открытых сетях с многорежимными стратегиями обслуживания / Ю.В. Малинковский, А.Ю. Нуеман // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2001. – № 3. – С. 129–134.

3. *Нуеман*, *А.Ю.* Открытые сети с многорежимными стратегиями обслуживания и отрицательными заявками / А.Ю. Нуеман // Вестник ТГУ. – 2002. – № 1 (1). – С. 90–93.

4. *Старовойтов*, *А.Н.* Инвариантность стационарного распределения сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и дисциплиной обслуживания PS / А.Н. Старовойтов // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: материалы IX Республиканской научной конференции студентов и аспирантов, Гомель, 13–15 марта 2006 г. / ГГУ им. Ф. Скорины; редкол.: Д.Г. Лин [и др.]. – Гомель, 2006. – С. 199–200.

5. *Старовойтов*, *А.Н.* Инвариантность стационарного распределения состояний сетей с многорежимными стратегиями обслуживания / А.Н. Старовойтов // Проблемы передачи информации. – 2006. – Т. 42, № 4. – С. 121–128.

6. *Open, Closed and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers* / F. Basskett [et al.] // J. Assoc. Comput. Mach. – 1975. – Vol. 22, № 2. – P. 248–260.

7. *Chandy*, *K.M.* Product-form and Local Balance in Queueing Networks / K.M. Chandy, J.H.Jr. Howard, D.F. Towsley // Journ. of the Assoc. Comput. Mach. – 1977. – Vol. 24, № 2. – P. 250–263.

8. *Kelly*, *F.P.* Networks of Queues / F.P. Kelly // Adv. Appl. Probab. – 1976. – Vol. 8, № 2. – P. 416–432.

9. *Яшков*, *С.Ф.* Математические вопросы теории систем обслуживания с разделением процессора / С.Ф. Яшков // Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн. Матем. статистика. Теор. кибернетика. – М.: ВИНИТИ, 1990. – № 29. – С. 3–82.

10. *Jackson*, *J.R.* Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

11. *Ивницкий*, *В.А.* Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004. – 772 с.

Поступила в редакцию 10.09.15.